仮想的な物理モデルに基づく製造要件に関する幾何学制約付トポロジー最適化法の開発

Topology optimization with geometrical constraint of manufacturability
based on the Fictitious physical model

京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻　助教　山田崇恭
Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University, **Takayuki Yamada**

要旨

トポロジー最適化は，設計自由度が最も高い構造最適化法として注目を集めている．トポロジー最適化は，力学的根拠に基づいて最適な形状を創成設計できるものの，得られる形状は幾何学的に極めて複雑な部分構造を持つ場合が多い．そのため，製造性や組立性等を考慮すると，工学的な意味では必ずしも最適設計解とは言えない．本研究では，このような課題を解決する方法として，所望の幾何学的特徴量を状態変数の関数により表現できる偏微分方程式系の構築を行う．このような方法論が構築できれば，幾何学的な問題に帰着できる製造工程や組立工程を考慮したトポロジー最適化が可能となる．さらには，種々の幾何学的条件を考慮したトポロジー最適化も可能となる．

1. はじめに

構造最適化は，力学的観点と，数学的観点に基づいて構造物の最適な形状を数値解析により求める方法である．中でもトポロジー最適化は，構造の形状だけではなく，孔の数などの形状形態をも変更可能とする最も設計自由度の高い構造最適化手法であり，現在，3D プリンター等の積層造形技術の普及により，工業製品の新しい設計基盤技術としても注目を集めている．しかしながら，トポロジー最適化は，幾何学的に極めて複雑な構造や，外形形状を明示的に表現できないグレースケール（中間領域）を最適設計解として許容しているため，工業製品への展開には多くの問題を抱えている．この問題の解決を目的として，新しい構造最適化法の開発に関する研究も近年，活発に行われている．このような動向の中，著者は，従来法の問題点を抜本的かつ本質的に解決し，さらには，最適形状の幾何学的複雑さを設定可能な方法論を世界に先駆けて開発することに成功した．これまで研究では，基本的には，物理的な特性評価を最適化の設計指針としているため，製品の製造工程や生産ラインを考慮すると，得られる形状は製品価格や製造時間の点において最適とは言えない場合が多い．すなわち，トポロジー最適化により得られる形状は，物理的には最適であるものの，製造が困難な形状が得られる場合が多い． そこで，本研究では，多くの機械加工において要求される幾何学的な制約として，最大寸法と最小寸法を考慮可能なトポロジー最適化法を開発し，機械加工を前提とした最適設計製造システムを構築する．すなわち，製品形状の最小寸法と最大寸法関する制約を考慮した上で，物理的，数学的な最適構造を創成設計する方法を開発し，機械加工による製造を前提とした設計製造システムを構築する．このような方法が構築できれば，計算機により物理的，数学的に最適な構造を創成設計後，通常の機械加工により製造が可能となるため，真の意味での最適設計システムを構築できる．その結果，今までにはない機能をもつデバイスの開発を可能とし，今後，次世代の基盤技術として広く産業界に貢献するも

のと大いに期待できる.

本研究の基本的なアイディアは，仮想的な物理モデルの考え方の導入により，製造工程から要求される幾何学制約条件を陰的に定式化し，製造工程をも考慮した最適構造創成設計法を構築する．すなわち，製造工程の幾何学的制約を考慮するための，仮想的な物理モデルによりその性能評価を数理的に行う方法を構築する．なお，仮想的な物理モデルに基づいて幾何学的制約を考慮する方法は，著者の独自のアイディアであり，この方法を用いることで，強い初期値依存性等の問題を回避しながら，物理的に最適でなおかつ，様々な製造工程をも考慮した形状の創成設計が可能となる．最初に，金型成型による制約とミル加工による制約を考慮可能な方法論[1]の考え方とその方法の一般論について概説し，本研究を通して新たに提案する幾何学的特徴量に対する数理モデルについて述べる.

2. 仮想的な物理モデルの考え方

トポロジー最適化では，最大化したい評価指標と，評価対象とする物理モデルが与えられ，数値解析により最適な形状を創成設計する．これまでの多くの研究報告例を比較すると，得られる最適構造は，対象とする数理モデルと評価指標に応じた特定の幾何学的特徴を持つことがわかる．著者は，この点に着目し，所望の幾何学的特徴を最適構造を持つような仮想的な現象及び仮想的な性能を与えて最適化を図り，その結果として幾何学的特徴を制約する最適化法を提案した.

例えば，特定の方向 $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$方向への仮想的な光を考えれば，工具や治具，型，目線などの直線的な移動や動作を考慮できる．この場合，次式に示す，定常移流，吸収及び拡散方程式により，所望の仮想的な光の分布を表現できる.

$$-L^2 div(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi)+LV\boldsymbol{d}\cdot\nabla\psi=\beta\chi(1-\psi)\quad in\ D$$

ただし，L は無次元化のための代表長さ，$\boldsymbol{A}$ は拡散テンソル，ϕ は仮想的な物理場，V は移流の速さを与えるパラメータ，β は状態場の分布を形状内部で規定させるためのパラメータである．また，χ は特性関数であり，形状内部で 1 外側で 0 となるように定義する．拡散係数テンソルは，規定方向成分が，その直交成分よりも十分に大きくなるように，次式で与えられる.

$$A=d\otimes d+\epsilon\sum_{i=1}^{N-1}\boldsymbol{e}_i^{\perp}\otimes\boldsymbol{e}_i^{\perp}$$

ただし，N は空間次元，$\boldsymbol{e}_i^{\perp}$は $\boldsymbol{d}$ の直交補空間における正規直交基底を表し，ϵは微小パラメータである．このモデルを用いれば，直線的な形状の移動等を表現できるため，型成形制約，ミル加工制約を表現できる.

3. 局所幾何学的特徴量に対する数理モデル

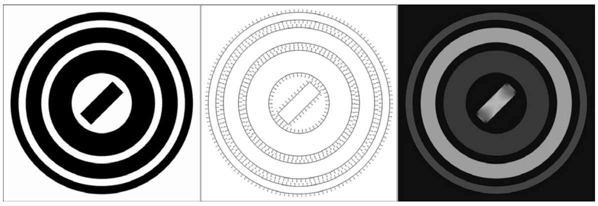
製造性や組立性を考慮した場合，局所的な寸法や曲率等の局所的な幾何学的特徴量が重要な指針となる．幾何学的特徴量をひとつの偏微分方程式系で表現できれば，多くの幾何学的制約条件を考慮する場合においても，計算量が増加しない上に，偏微分方程式系の解により幾何学的特徴量を直接表現できる特徴を持つ．従って，製造工程や組立工程を幾何学的特徴量に基づく制約問題に帰着できれば，それらを同時に扱うことができる．本研究では，多くの思考実験に基づいて，次式の偏微分方程式系を見い出した.

$$-div(a\nabla s_i-e_i\chi)+(1-\chi)s_i=0\quad in\ D$$

ここで, a は拡散係数, s_i は, x_i 方向の状態変数, e_i は標準基底, χ は対象とする形状 Ω_1 により占められた領域で 1, 対象とする形状 Ω_1 により占められていない領域で0をとる特性関数である. 状態変数を並べたベクトル $\boldsymbol{s} = [s_1\ s_2\ \cdots s_n]^{\mathrm{T}}$ の向きは, 対象とする形状の境界近傍において法線と一致する. また, 曲率の影響を受けるものの, ベクトル場 $\boldsymbol{s}$ の発散は, 形状の厚みと比例関係にあることを定性的に確認した.

4. 数値解析例

提唱する偏微分方程式系の特徴について, 数値解析例により示す. 最初に, 2 次元問題の結果を図 1 に示す. ここでは, 2 次元問題, 3 次元問題ともに, 提案する偏微分方程式系を有限要素法により数値解析することとする.



(a) (b) (c)

図1 数値解析例1(2 次元問題)

図1(a)は幾何学的特徴量の抽出対象とする形状を表し, 図中, 黒色は特性関数が 1 をとる領域, 白色は特性関数が 0 をとる領域を意味する. 図 1(b)は形状の境界上におけるベクトル場 $\boldsymbol{s}$ の方向を表す. 図 1(b)の結果から, 形状の法線方向を適切に表現できることを定性的に確認できる. 次に, 図 1(c)にベクトル場 $\boldsymbol{s}$ の発散を示す. 図に示すように, 厚みが一定の円環の内部で一定値をとり, その大きさは厚みに反比例していることを定性的に確認できた.

次に, 3 次元問題への適用例を図 2 に示す.

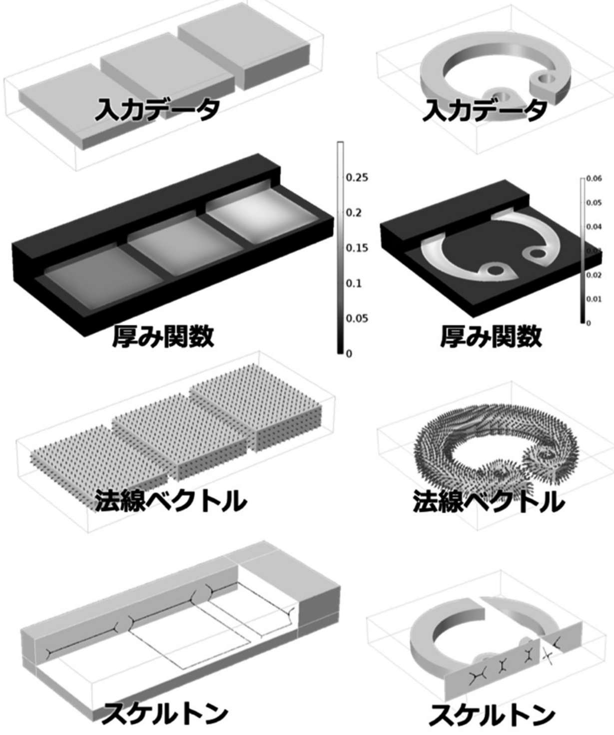


図 2 数値解析例 2(3 次元問題)

3 次元問題においても, 所望の特徴を持つように関数系を定義できることを定性的に確認できた. これらの成果は, 国際雑誌 Journal of Computational Design and Engineering に投稿し, 印刷中の段階にある.

5. トポロジー最適化への適用

局所的な幾何学的特徴量を偏微分方程式系の解により表現可能となったため, 通常の物理モデルと同様に, 最適設計問題における制約条件として, 幾何学的特徴量を考慮することができる. ここでは, 研究成果(口頭発表)[1]で発表した結果について紹介する. ベクトル場の発散により局所的な寸法を表現できることを利用し, 形状の最大寸法を制約した方法論の構築に成功した. ここでは, 2 次元における面積制約付き剛性最大化問題への適用例を示す. 図 3 に示すように, 2 次元矩形領

域を考え，矩形領域の50%を用いて最も剛性が高い形状の創成設計を試みる．

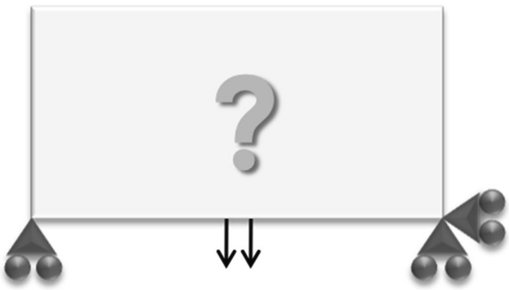


図 3 問題設定

矩形領域の下端左方をローラー指示，下端右方を完全拘束し，下端中央部において下向きの表面力を作用させる．このとき，通常のトポロジー最適化を適用すると図 4 の結果が得られる．

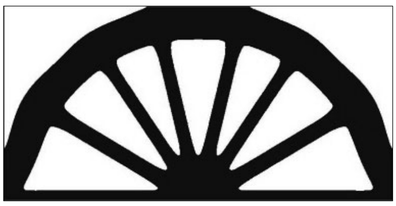


図 4 制約なしの場合の結果

本研究で提案する偏微分方程式系に基づいて最大寸法制約を考慮した場合の結果を図 5 に示す．

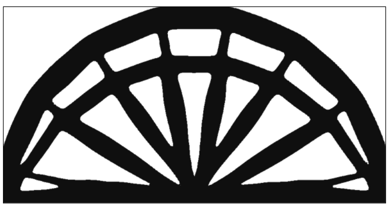


図 5 最大寸法制約ありの場合

図 5 に示すように，2 重のアーチ構造で剛性を確保しながら制約を満たす構造が得られた．これにより，本研究の手法の妥当性を確認することができた．

5．まとめ

本研究では，幾何学的特徴量を表現する偏微分方程式系を提唱し，その検証を行った．また，トポロジー最適化への適用可能性についても検討し，幾何学的特徴量を制約として与えながら，最適構造を創成設計可能であることを確認した．

謝辞

また，本研究を援助していただいた公益財団法人京都技術科学センターに感謝致します．

参考文献

[1] 佐藤勇気，山田崇恭，泉井一浩，西脇眞二，仮想的な物理モデルに基づく幾何学的制約付きトポロジー最適化，日本機械学会論文集，Vol.83, No.851, (2017), p.17-00081.

研究成果発表（論文）

[1] Yamada, T., Geometrical shape features extraction using a steady state partial differential equation system, ***Journal of Computational Design and Engineering***, in press. Doi: 10.1016/j.jcde.2019.03.006

[2] 山田崇恭，正宗淳，寺本央，長谷部高広，黒田紘敏，幾何学的特徴量に対する偏微分方程式系に基づく幾何学的特徴制約付きトポロジー最適化（積層造形における幾何学的特異点を考慮したオーバーハング制約法），**日本機械学会論文集**，投稿中．

研究成果発表（口頭発表）

[1] Yamada, T., Thickness constraints for topology optimization using the fictitious physical model, ***Proceedings of the 6th International***

Conference on Engineering Optimization, September 17-19, 2018, pp.483-490.

[2] 山田崇恭, PDE を基軸としたインテリジェント設計製造プラットフォーム構想の基礎検討, 第28回設計工学・システム部門講演会, 日本機械学会, 2018年11月4日-6日, 沖縄, No. 2401.

[3] 山田崇恭, 近藤継男, 偏微分方程式による幾何学的特徴量抽出の物理的解釈の試み, 2019 年度精密工学会春季大会, 精密工学会, 2019 年 3 月 13 日−15 日, 東京, No.A78.

[4] Yamada, T., Geometrical shape features extraction based on the partial differential equation inspired by the high order homogenization and its application to topology optimization, GSIS International Summer School 2018: The Homogenization Method for Topology Optimization of Structures: Old and New, 2018 年 8 月 11 日-12 日, 東北大学純粋・応用数学研究センター, 宮城, 日本.

[5] Yamada, T., A PDE model for geometrical feature extraction in images and its applications in digital engineering, Keynote (Plenary), The Asian Conference on Design and Digital Engineering 2018 (ACDDE2018), 2018 年 11 月 1 日−3 日, 沖縄残波岬ロイヤルホテル, 沖縄, 日本.

[6] 山田崇恭, 幾何学的特徴量抽出に対する偏微分方程式とその解析解に関する考察, **月曜解析セミナー**, 2019 年 1 月 28 日, 北海道大学理学院数学専攻, 札幌, 日本.